

Trigonometría

RELACIÓN FUNDAMENTAL

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cotg^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

$$\sin \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

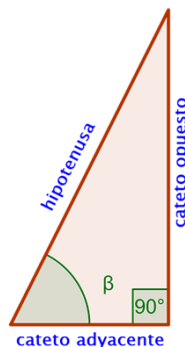
$$\cos \beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\operatorname{cosec} \beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sec \beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cotg \beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$



$$\text{Conversión: } \frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$$

$$\text{grados} \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{radianes}$$

$$1^\circ \approx 0,0175 \text{ rad}; 1 \text{ rad} \approx 57,296^\circ$$

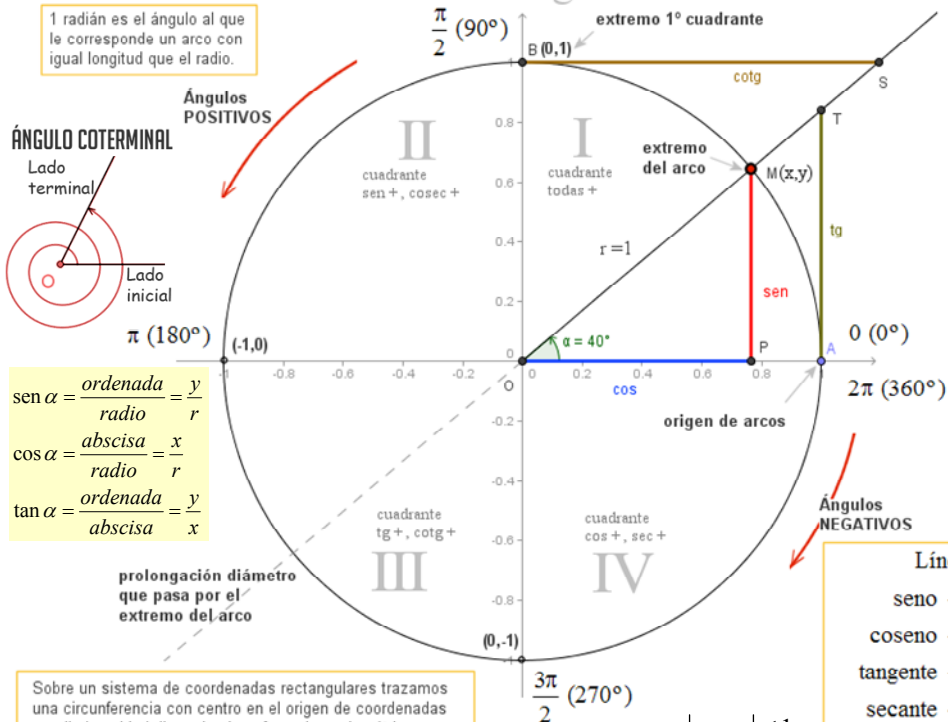
$$19,57^\circ \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{parte entera} & \rightarrow & 19^\circ \\ 0,57 \times 60 = 34,2 & \rightarrow & 34' \\ 0,20 \times 60 = 12 & \rightarrow & 12'' \end{bmatrix} \Rightarrow 19^\circ 34' 12''$$

$$\left[19 + 0,57 + 0,003 = 19 + \frac{34}{60} + \frac{12}{3600} \right]$$

$$\text{Sistema sexagesimal: circunferencia} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$1^\circ = 60'; 1' = 60''; L_{\text{arco}} = \text{radio} \cdot \text{ángulo (en rad)}$$

Circunferencia goniométrica



Cualquier triángulo

Área (A), radios de la circunferencia inscrita (r) y circunscrita (R), y semiperímetro (s)

$$A = (\text{base} \times \text{altura})/2; s = (a + b + c)/2$$

$$A = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

$$\text{Herón: } A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = r \cdot s$$

$$r = \sqrt{\frac{[(s-a)(s-b)(s-c)]}{s}}$$

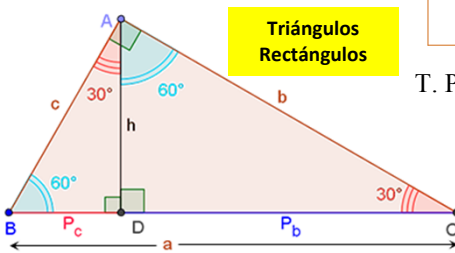
$$R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} \frac{b}{\sin \beta} = \frac{1}{2} \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2b \cdot P_c \quad (+ \text{agudo}; - \text{obtusos})$$

$$h_a = (2/a) \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

3 bisectrices $\rightarrow$ Incentro; 3 medianas $\rightarrow$ Baricentro

3 alturas $\rightarrow$ Ortocentro; 3 mediatrices $\rightarrow$ Circuncentro



Triángulos Rectángulos

$$\text{T. Pitágoras: } a^2 = b^2 + c^2$$

$$h^2 = P_b \cdot P_c; h \cdot a = b \cdot c$$

$$b^2 = a \cdot P_b; c^2 = a \cdot P_c$$

$$P_b, P_c \rightarrow \text{proyecciones}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \text{T. rectángulo}$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow \text{T. acutángulo}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow \text{T. obtusángulo}$$

Cualquier triángulo

Teorema del seno :

Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Teorema del coseno :

En todo triángulo se verifica que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Nota: Para ángulos obtusos el coseno es negativo

$$\text{Función arco seno: } y = \arcsen x \Leftrightarrow x = \sen y$$

$$\text{ej. con la calculadora: } \sin^{-1} \rightarrow \arcsen(0,5) = 30^\circ$$

R.T. DE ÁNGULOS QUE SE OBTIENEN A PARTIR DE OTROS

Ángulo DOBLE

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Ángulo MITAD

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Sumas en Productos

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Productos en sumas

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

Sumas y Diferencias

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

VALORES

grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	0	*	0
cotg	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	*	0	*
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	*	-1	*	1
cosec	*	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	*	-1	*

Un radián (1 rad) es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco con igual longitud que el radio.

Notación:

$$(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha \text{ pero no es } \sen \alpha^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \tan \alpha; \cotg \alpha = \cot \alpha; \operatorname{cosec} \alpha = \csc \alpha$$

Razones trigonométricas de cualquier ángulo